MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 9
20.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

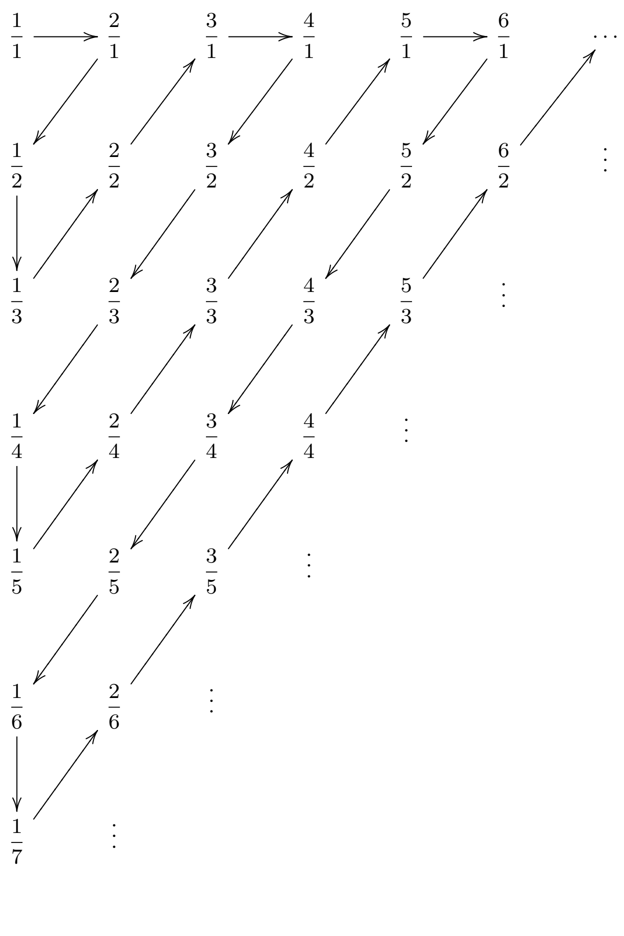
1. Zeigen Sie, daß die Abbildung
$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad f(x,y) = (2x - 3y, 3x - 6y)$$
bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrabbildung f^{-1} explizit an.

2. a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Aussage:
$$\text{Für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ gilt } \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$
   b) Beweisen Sie die Ungleichung $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, indem Sie die schärfere Ungleichung $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion beweisen.

3. Es sei $N = \mathbb{R}_0^+$, $n_0 = 0$ und $\nu : N \to N$, $\nu(n) = n+1$. Ist (N, n_0, ν) eine Peanostruktur? Falls nein: Welche der drei definierenden Eigenschaften einer Peanostruktur sind erfüllt, welche nicht?

4. a) Geben Sie eine surjektive Abbildung $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ an!

   Nun suchen wir eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$. Diese wurde einst von dem Mathematiker Georg Cantor mit seinem *Ersten Diagonalverfahren* konstruiert und funktioniert folgendermaßen: Man kann alle Brüche in einer Tabelle anordnen und einen Weg hindurchlegen. Dem n-ten Punkt des Weges entspricht der Bruch, der der natürlichen Zahl n zugeordnet wird.



Dies gibt uns die folgende Wertetabelle:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$f(x)$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	...

b) Überzeugen Sie sich, daß die oben definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ tatschlich surjektiv ist, aber nicht injektiv.

c) Geben Sie eine Methode an, wie man obiges Verfahren erweitern könnte, um eine surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ zu konstruieren. (In Worten genügt.)

d) Begründen Sie, daß es somit auch eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gibt!

Abgabe bis 10.1.2020, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).

Wir wünschen allen Teilnehmern der Vorlesung ein friedliches Weihnachtsfest und ein glückliches und erfolgreiches neues Jahr 2020!